数理解析研究所講究録
101巻 1970年 40-51

Vortex sheetのまき上りについて

東大 理　桑原 邦郎

§1. 序

Vortex sheet の運動を考る際，そのvortex sheet を有限個の渦系でおきかえたものを考える。このモデルを今，Discrete vortex model とよぶ。Nコの渦糸の存在する系を考え，第i番目の渦糸に注目すると，その渦糸は他のN−1コの渦糸によって運動をおこなう。その速度は各渦糸により誘起される速度の和として与えられるから，

$$\frac{dx_i}{dt}=-\frac{1}{2\pi}\sum_{j\neq i}\frac{\kappa_j(y_i-y_j)}{r_{ij}^2},\quad \frac{dy_i}{dt}=\frac{1}{2\pi}\sum_{j\neq i}\frac{\kappa_j(x_i-x_j)}{r_{ij}^2} \tag{1}$$

となる。ここで(x_i, y_i)は第i番目の渦糸の位置，κ_iはその強さ，$r_{ij}^2=(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2$である。時刻$t=0$における渦糸の位置および強さを与えれば，$t=t$における渦糸の位置は、この連立方程式によって完全に決定される。この実際の計算は計算機によって、比較的簡単に実行できる。速度の不

連続面の安定性をとりあつかったRosenhead (1931) 以来、いくつかの問題について、この方法による計算がおこなわれている。しかし、このモデルには強い不安定性があることがわかっている。その上、その不安定性は、計算を精密化するために渦糸の数Nを大きくとるほど強くなる。この不安定性の原因は、二つの渦糸がある瞬間に接近したとすると、たがいに、その距離に反比例する強い速度が誘導されることによると思われる。実際の流れでは、このようなことはおこりえない。したがって、この不安定性をさけるために、粘性を考慮してみる。いま$t=0$において$\frac{\kappa}{2\pi}\frac{1}{r}$なる速度分布をもつ粘性流を考えると$t=t$においては、Navier Stokes方程式を解いて

$$\frac{\kappa}{2\pi}\frac{1}{r}\left\{1-\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right\} \tag{2}$$

で与えられる(図1)。ここでνは運動粘性率である。(1)における定数κ_jを距離と時間の関数

$$\kappa_j\left\{1-\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right\} \tag{3}$$

でおきかえた方程式を考えると、rが$2\sqrt{\nu t}$より大なるときは完全流体の場合に漸近的に一致し、二つの渦糸が非常に接近した場合には、完全流体のときとは異なり、とくに強い速

度が誘起されることはない。したがって、この流れは安定化される。

§2. 数値解

例として、渦度が、$-1 \leqq x \leqq 1$ の間で、

(I) $K(x) = -\frac{d}{dx}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

(II) $K(x) = -\frac{d}{dx}(1-x^2)$

(III) $K(x) = -\frac{d}{dx}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$

という分布をしているvortex sheetを考える。

例(I)で粘性を考慮していないTAKAMI(1964)の結果では、vortex sheetのまき上る部分は強く乱れてしまう(図2)のに反して、$\nu=0.003$とした結果では(図3)なめらかなまき上りがみられる。ここで(├─┤)は粘性のきく範囲$2\sqrt{\nu t}$を示している。図4では$\nu=0.002$まではなめらかなまき上りを示すが、νをそれ以下にしてしまうと、乱れてきまり、安定化させるνの限界を表している。

例(II)の場合も(図5)$\nu=0.001$とすると十分安定なまき上りがみられる。

例(III)の場合(図6,7,8),νを大きくするほど安定が良くなり、なめらかなまき上りが見られる。

結論として,νを適当に大きくとれば,Vortex sheetはなめらかなまき上りを示し,νを小さくするにしたがい,そのまきこむ回数は多くなり,あるνよりさらに小さくすると,乱れてしまい,なめらかなまき上りが見られなくなる。しかし,νが計算を安定化させるもの以上の,真の粘性という意味をもたせることができるかは,ここでは結論できない。

文献

1. Rosenhead, L., The Formation of Vortices from a Surface of Discontinuity, Proc. Roy. Soc. A134, 170-92, 1931.

2. Takami, H., A numerical Experiment with Discrete-Vortex Approximation, with Reference to the Rolling up of a Vortex Sheet, Department of Aeronautics and Astronautics Stanford University, SUDAER No. 202 September 1964.

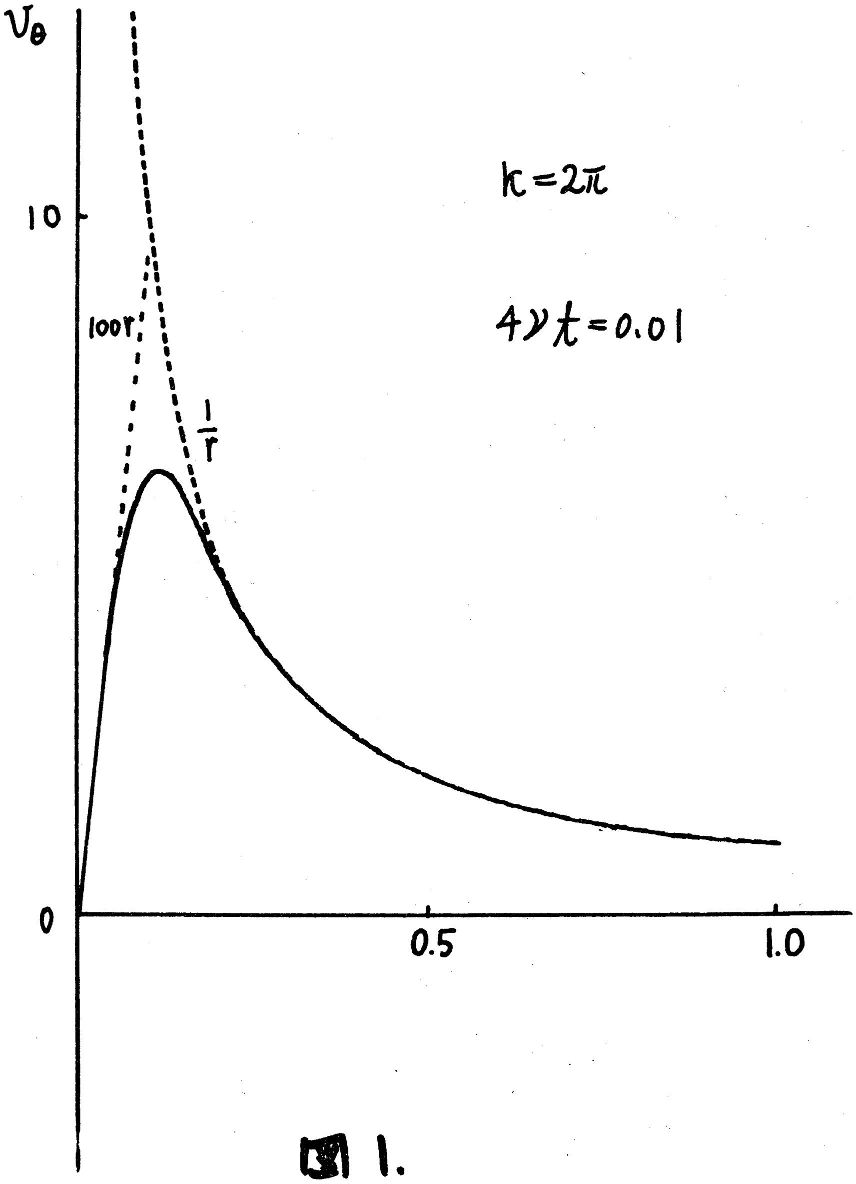
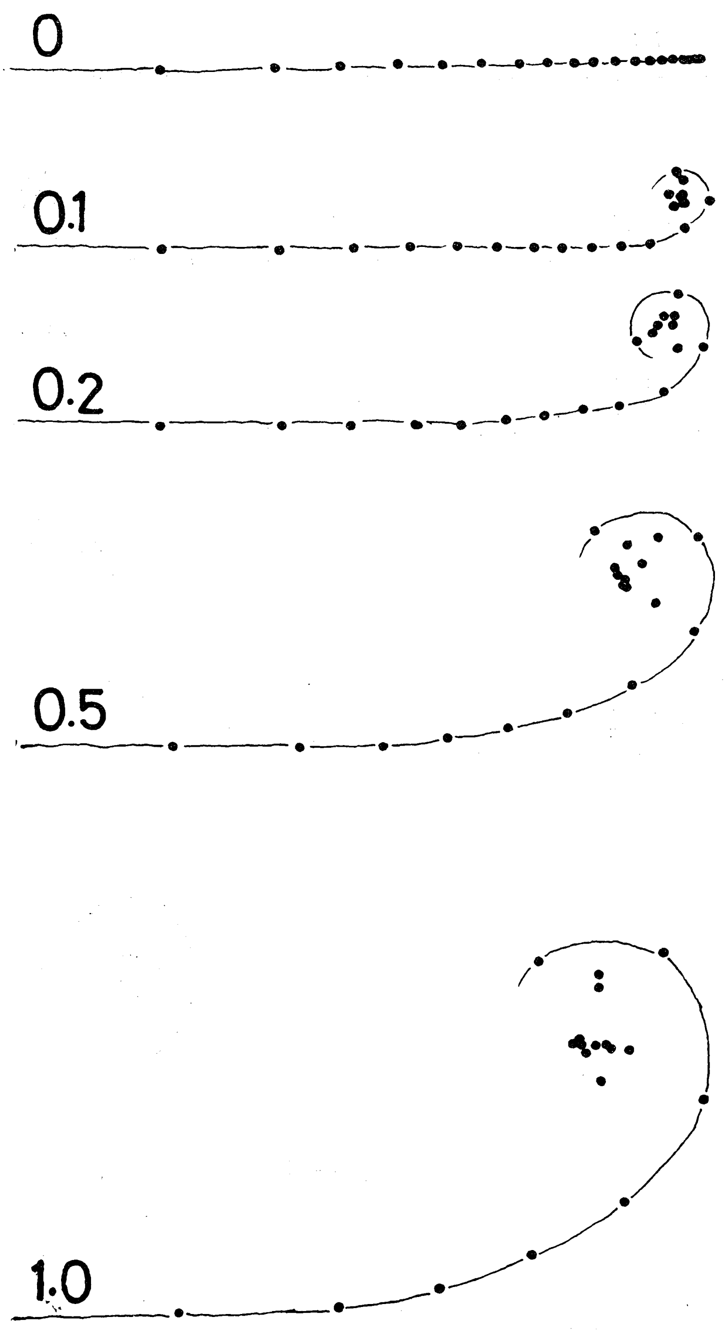
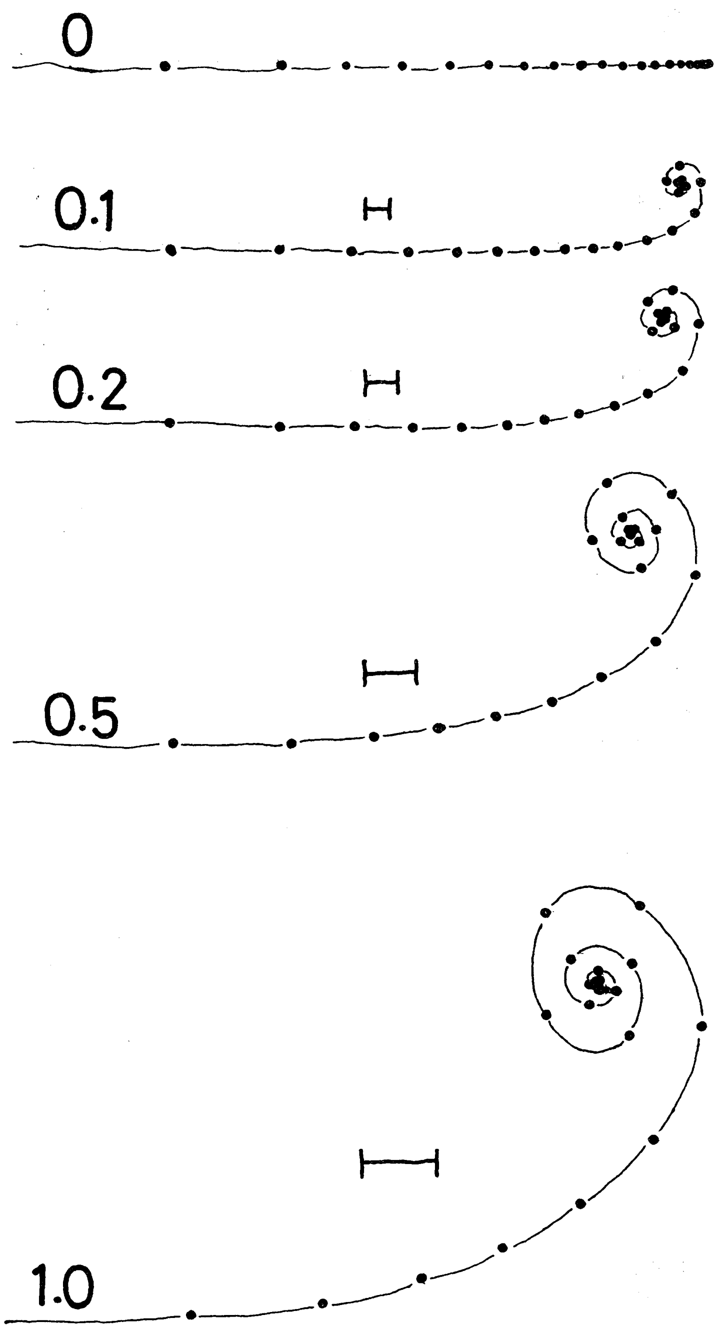


図 1.

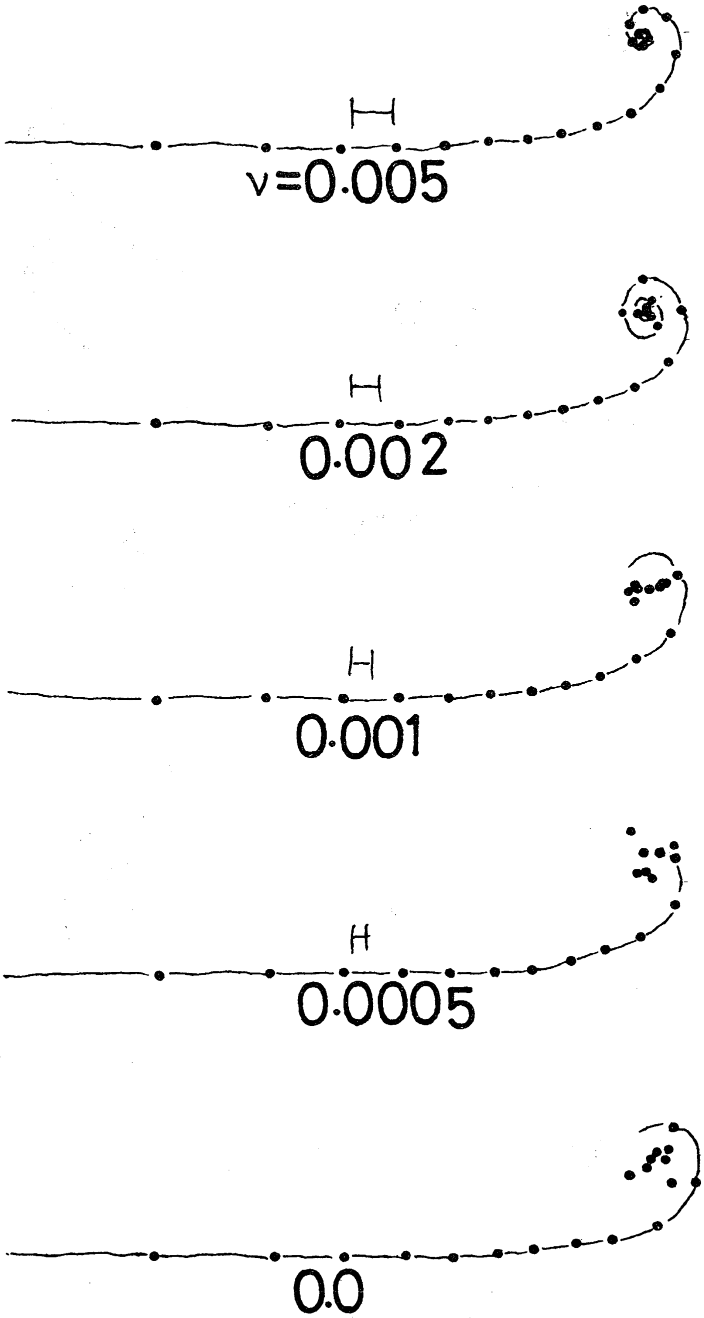


ν=0 (TAKAMI)

図2



ν=0.003
図3.



t = 0.2
図4

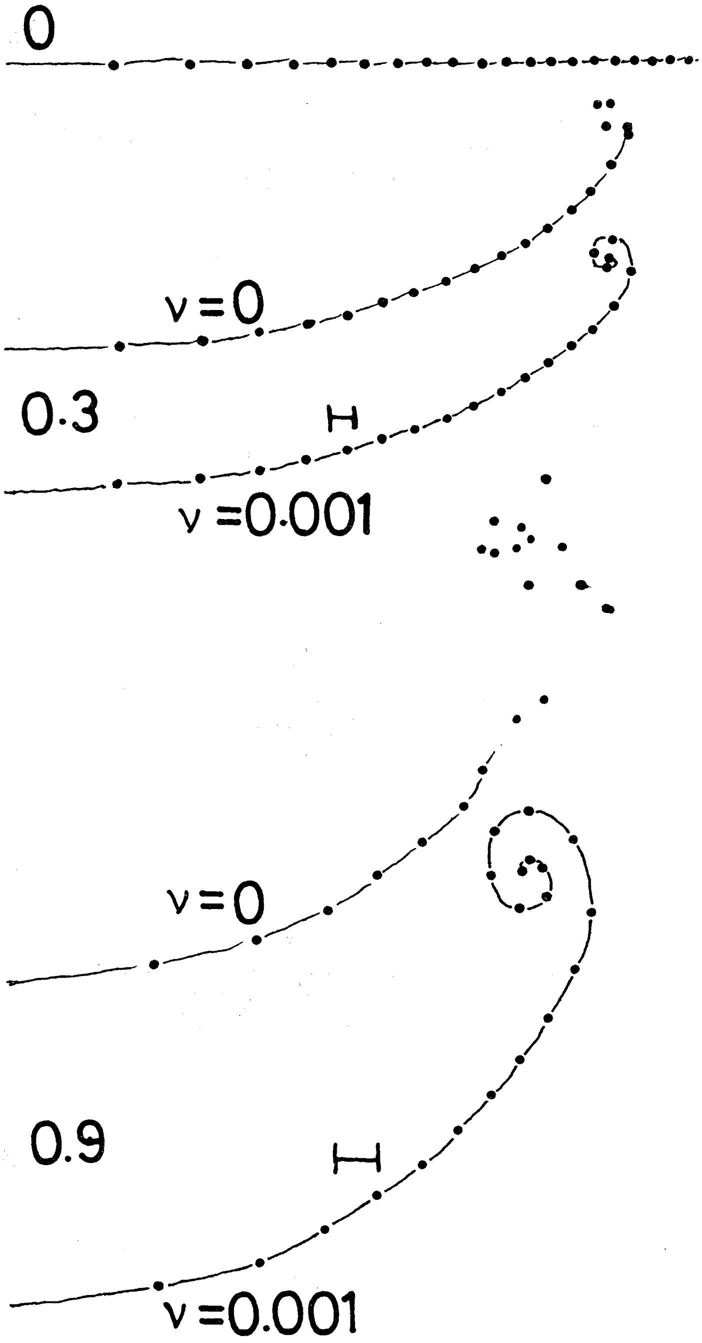
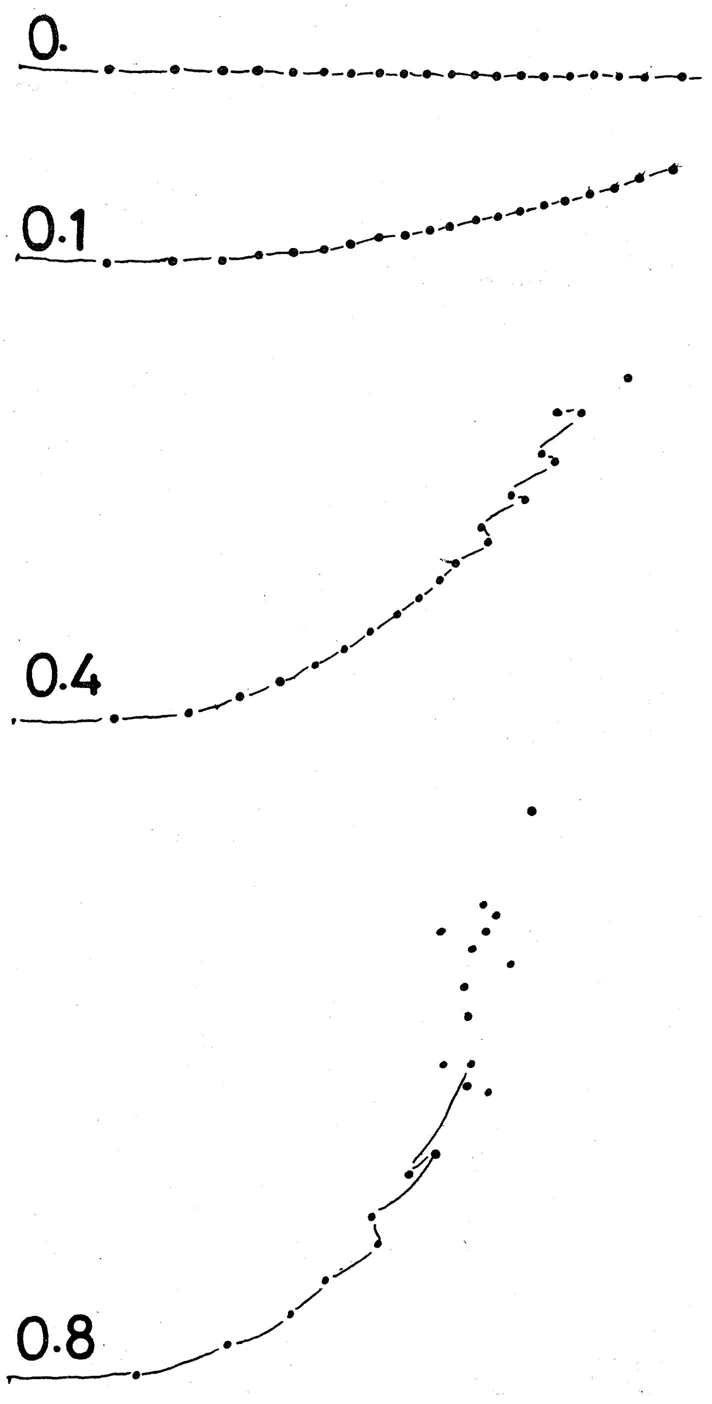
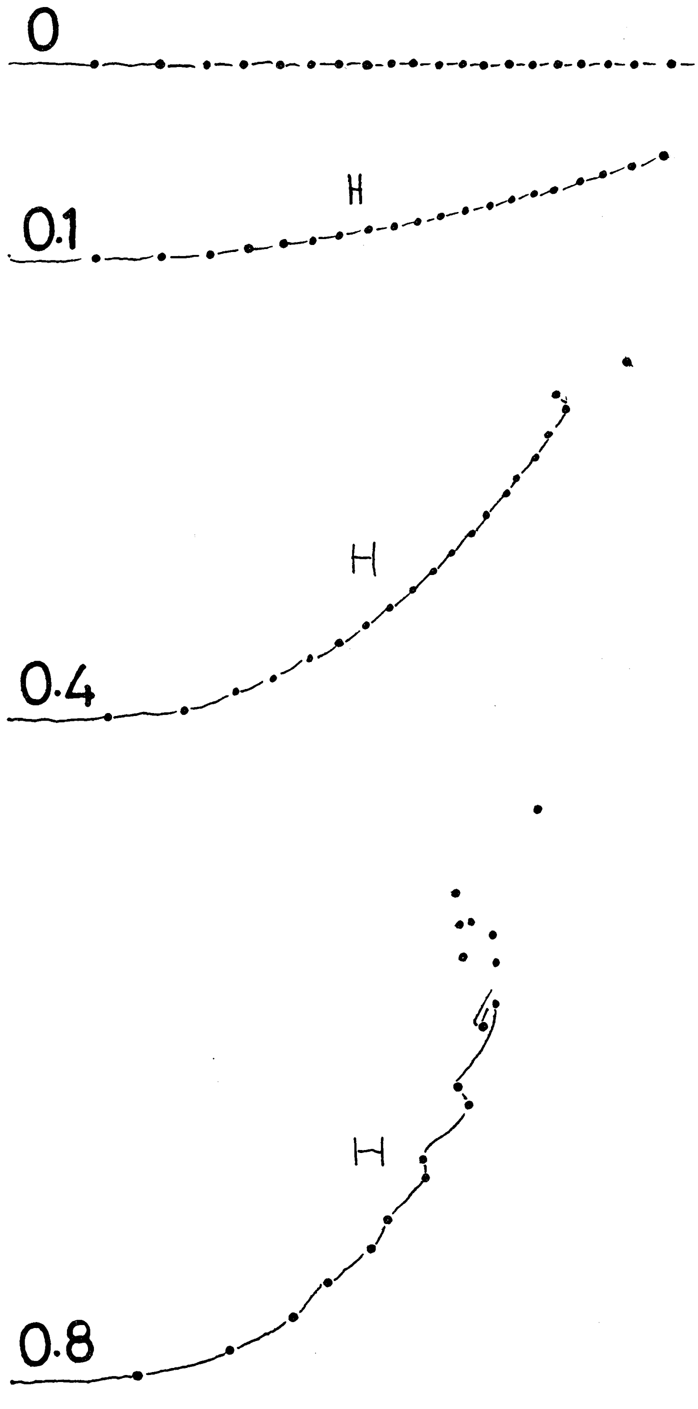


図5

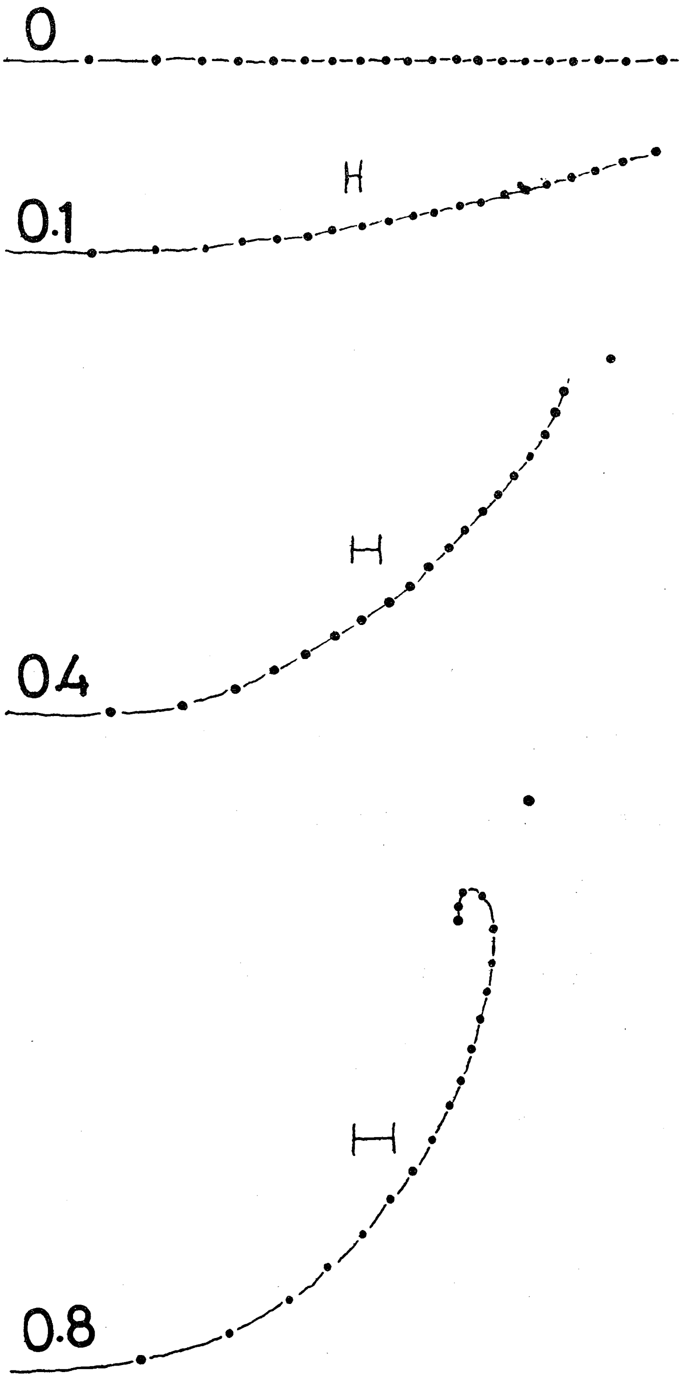


v=0
図6



ν=0.0005

図7



ν=0.001

図8